

# Lösungen des Monats - März 2023

## Kategorie: Maximathik 9./10. Schulstufe

### Aufgabe 1: MathDonalds

Florentina fährt mit dem Fahrrad zum nächstgelegenen MathDonalds und wieder zurück. Vom Hunger geplagt fährt sie bei der Hinfahrt um 3 km/h schneller und braucht daher 5 min weniger lang als bei der Rückfahrt. Insgesamt fährt sie 45 min. Wie viele Kilometer radelt Florentina insgesamt?

*Ergebnis:* 10

*Lösung:* Florentina benötigt insgesamt 45 min, wobei sie auf der Hinfahrt um 5 min schneller ist. Somit braucht sie für die Hinfahrt  $20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$  und für die Rückfahrt  $25 \text{ min} = \frac{5}{12} \text{ h}$ . Man bezeichne mit  $v$  die Geschwindigkeit auf der Rückfahrt. Da die Strecken für die Hinfahrt und die Rückfahrt gleich lang sind, gilt:

$$\frac{1}{3}(v + 3) = \frac{5}{12}v$$

Löst man diese Gleichung nach  $v$  auf, erhält man  $v = 12 \text{ km/h}$ . Daher ist die Strecke zum nächstgelegenen MathDonalds  $\frac{5}{12} \cdot 12 = 5 \text{ km}$  und die gesamte Strecke, die Florentina radelt, 10 km lang.

### Aufgabe 2: Chicken MathNuggets

Bei MathDonalds angekommen will Florentina jede Menge Chicken MathNuggets bestellen. Diese werden in Packungen zu je 6, 9 und 20 Stück verkauft. Wie lautet die höchste Anzahl an MathNuggets, die Florentina nicht bestellen kann.

*Bemerkung:* 14 Stück kann sie nicht bestellen,  $15 = 9 + 6$  Stück aber schon.

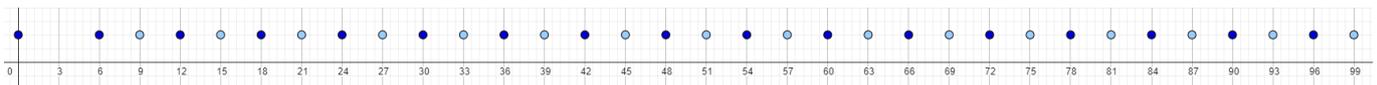
*Ergebnis:* 43

*Lösung:* Durch cleveres und sorgfältiges Probieren wird man 43 als Lösung ermitteln können. Um zu beweisen, dass es tatsächlich keine größere Zahl als 43 gibt, ist eine Fallunterscheidung notwendig.

Florentina kann eine Anzahl von  $N$  MathNuggets nicht bestellen, wenn  $N$  sich nicht als  $N = 6k + 9l + 20m$  (für  $k, l, m$  natürliche Zahlen) darstellen lässt. Wir unterscheiden 3 Fälle für  $N$ :

1.  $N$  ist durch 3 teilbar ( $N = 3n_1$ ).

Wenn  $N$  durch 6 teilbar ist, gilt  $N = 6k$ . Für den Fall, dass  $N$  nicht durch 6 teilbar ist, erhält man bei der Division durch 6 Rest 3.  $N$  lässt sich dann also darstellen als  $6a + 3$ . Dies lässt sich umschreiben zu  $6(a - 1) + 9 = 6k + 9$ . Also reichen 6er und 9er Nuggets aus für  $a > 0$ . Somit ist es nur nicht möglich  $N = 6 \cdot (0 - 1) + 9 = 3 \cdot 1 = 3$  Nuggets zu bestellen ( $n_1 > 1$  muss gelten). Die größte Anzahl mit Rest 0, die man nicht bestellen kann, ist somit  $N = 3 \cdot 1 = 3$ .



*Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst*



2.  $N$  geteilt durch 3 ergibt 2 Rest. ( $N = 3n_2 + 2$ )

In diesem Fall werden 6er und 9er Nuggets nicht ausreichen, weil man dadurch nur Vielfache von 3 erhält. Wir benötigen also eine 20er Packung und  $N$  muss größer als 20 sein. Subtrahiert man 20 von  $N$  erhält man:

$$N - 20 = (3n_2 + 2) - (3 \cdot 6 + 2) = 3(n_2 - 6)$$

Also eine durch 3 teilbare Zahl, für die man wieder analog zu Fall 1 vorgehen kann. Somit gilt zusätzlich die Bedingung  $n_1 = n_2 - 6 > 1$ , welche sich zu  $n_2 > 7$  umschreiben lässt. Für  $n_2 > 7$ , kann man  $N$  darstellen als:

$$N = 3(n_2 - 6) + 20 \cdot 1$$

Die größte Anzahl mit Rest 2, die man nicht bestellen kann, ist somit  $N = 3 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 23$ .



3.  $N$  geteilt durch 3 ergibt 1 Rest ( $N = 3n_3 + 1$ ).

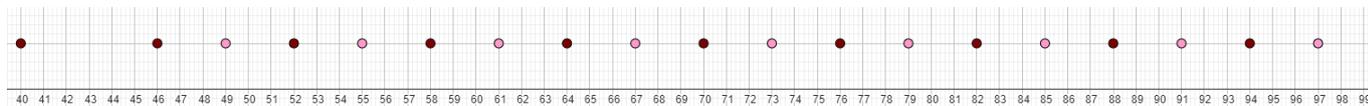
Für diesen Fall werden von den 20er Packungen mindestens 2 benötigt und  $N$  muss größer als 40 sein. Subtrahiert man 40 von  $N$  erhält man:

$$N - 40 = (3n_3 + 1) - (3 \cdot 13 + 1) = 3(n_3 - 13)$$

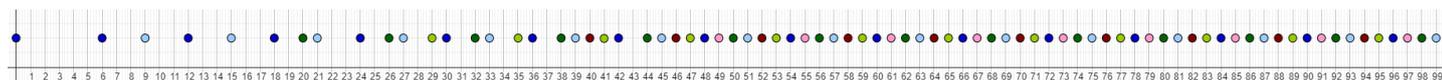
Also eine durch 3 teilbare Zahl, für die man wieder analog zu Fall 1 vorgehen kann. Somit gilt zusätzlich die Bedingung  $n_1 = n_2 - 13 > 1$ , welche sich zu  $n_2 > 14$  umschreiben lässt. Für  $n_3 > 14$ , kann man  $N$  darstellen als:

$$N = 3(n - 13) + 20 \cdot 2$$

Die größte Anzahl mit Rest 1, die man nicht bestellen kann, ist somit  $N = 3 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 43$ .



Insgesamt ist die größte Anzahl an Nuggets, die man nicht bestellen kann 43.



### Aufgabe 3: Sour Cream und Ketchup

Zusätzlich zu ihren MathNuggets hat Florentina auch 13 Päckchen Sour Cream und 13 Päckchen Ketchup bestellt. Als Florentina zu essen beginnt, öffnet sie zufällig 2 Päckchen Sauce. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass die geöffneten Saucen gleich sind?

*Ergebnis:* 48

*Lösung:* Nehmen wir an, dass die erste Sauce Ketchup ist, dann bleiben noch 13 Päckchen Sour Cream und 12 Päckchen Ketchup übrig. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Sauce dann wieder Ketchup ist, beträgt  $\frac{12}{25} = 0.48$ . Analoges gilt, wenn die erste Sauce Sour Cream ist.

*Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst*

